2014 小學數學競賽選拔賽初賽試題

第 二 試：應 用 題 (考試時間 90 分鐘)

◎ **請將答案填入答案卷對應題號的空格內，只須填寫答案，不須計算過程。本題目卷正反面空白處可為作演算草稿紙。每題 25 分，共 300 分**

1. 小王與小李參加公司尾牙聚餐抽獎，小李發現他們兩人所抽出的號碼之數碼和都等於 8 且數碼正好順序相反的二位數，小李所抽出的號碼比小王所抽出的號碼大 18。請問小王所抽出的二位數是什麼？

【解 1】

由數碼順序對調後所得的二位數比原來的二位數大，可知小王所抽出二位數的十位數數碼比個位數數碼小。由它的數碼和為 8 知小王所抽出的二位數只能是 17、26、35。但 $71-17>62-26>53-35=18$，故知小王所抽出的二位數為 35。

【解 2】

令小王所抽出的二位數為 $\overline{ab}$，則可知

$$\begin{cases} a+b=8 & (1) \\ (10b+a)-(10a+b)=18 & (2) \end{cases}$$

化簡(2)式可得 $b-a=2$。

再由(1)式可求得 b=5、a=3，故小王所抽出的二位數為 35。

答：35

2. 某校田徑隊共有 10 名選手參加全國運動會比賽獲得冠軍，校長頒發隊員每人 1500 元獎金，隊長則比全隊 10 名選手所獲得的平均獎金還多 900 元。請問隊長所獲得的獎金為多少元？

【解】

因隊長得到的獎金比全部十個人的平均多 900 元，因此如果他把多出來的 900 元平均分給其餘九人，則隊長的獎金即為十個人的平均獎金，且其他九人的獎金也都增加 100 元變為 1600 元；此時因隊長的獎金即為十個人的平均獎金，所以隊長獲得 1600+900=2500 元。

答：2500 元

3. 在某次宴會中，每位出席參加的男士都與 2 位女士握手，而每位女士則都與 3 位男士握手。已知此次宴會的總參加人數超過 30 人但不足 40 人，請問此次宴會總共有多少位男士參加？

【解】

因每位出席參加的男士都與 2 位女士握手，而每位女士則都與 3 位男士握手，且男女之間握手的總次數相等，故知男士的人數與女士的人數之間的比為 3∶2，所以參加宴會的總人數為 5 的倍數。因介於 30 與 40 之間的整數中僅 35 為 5 的倍數，故知參加人數為 35 人，因此可得知男士的人數是 $35\times\frac{3}{3+2}=21$ 位。

答：21 位

4. 有位主婦在市場買了相同重量的牛肉與香腸，牛肉每公斤 150 元、香腸每公斤 200 元。此時，他的丈夫對她說：「如果妳把總錢數平分為兩半，一半買牛肉、一半買香腸，則最後所買的牛肉與香腸的總重量比現在二者的總重量多 2 公斤。」請問這位主婦購買牛肉與香腸所花費的總錢數為多少元？

【解 1】

可知 150：200 = 3：4 且 150 與 200 的最小公倍數為 600，故知這位主婦買香腸的錢數共佔了她總錢數的 $\frac{4}{7}$；而依她先生所建議的購買方式，可知總錢數中總共有 $\frac{4}{7}-\frac{1}{2}=\frac{1}{14}$ 是從原本購買香腸改為購買牛肉。可知每從原本購買香腸中拿出 600 元改為購買牛肉後，會少買 3 公斤的香腸且多購買 4 公斤的牛肉，即總重量增加了 1 公斤。現因總重量增加了 2 公斤，故知從原本購買香腸中共拿出了 1200 元改為購買牛肉，因此這位主婦花費的總錢數為 $1200\div\frac{1}{14}=16800$ 元。

【解 2】

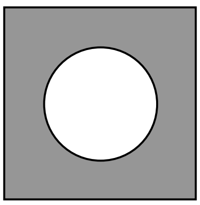
每公斤香腸價錢是每公斤牛肉價錢的 $\frac{200}{150}=\frac{4}{3}$ 倍，因此在花費的錢數相同時，牛肉公斤數是香腸公斤數的 $\frac{4}{3}$ 倍，此時平均每公斤為 $\frac{150\times4+200\times3}{4+3}=\frac{1200}{7}$ 元，而原先購買的牛肉與香腸平均每公斤為 $\frac{150+200}{2}=175=\frac{1225}{7}$ 元。因為她的丈夫所建議方式的總重量比原先的總重量多 2 公斤，且兩者平均每公斤之間的價差為 $\frac{1225}{7}-\frac{1200}{7}=\frac{25}{7}$ 元，故知原先的總重量為 $\frac{1200}{7}\times2\div\frac{25}{7}=2400\div25=96$ 公斤，所以這位主婦購買牛肉與香腸所花費的總錢數為 175×96=16800 元。

【解 3】

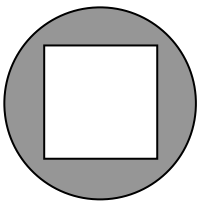
若令這位主婦原先各買了 x 公斤的牛肉與香腸，則由題意知這位主婦的總錢數為 $150x + 200x = 350x$。由丈夫所說的話可得知 $\frac{175x}{150}+\frac{175x}{200}=2x+2$，化簡後可得 $28x+21x=48x+48$，即 $x=48$，所以這位主婦購買牛肉與香腸所花費的總錢數為 150×48+200×48=16800 元。

答：16800 元

5. 有一個立體的形體，從正上方看與從側面看它的外型如下二圖。請繪出這個立體圖形的外貌。

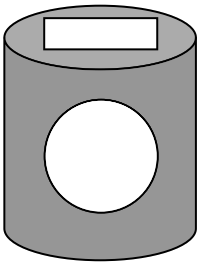


從側面看



從正上方看

【解】
由正上方看的圖形可判斷此立體為圓柱，再由從側面看的圖形知此立體為如圖所示的圖形



6. 將 20 顆相同的珠子放入 8 個相同的盒子內，使得每個盒子內的珠子數都是正奇數顆，若改變盒子的排列順序視為相同的放法，請問共有多少種不同的放法？

【解 1】
可判斷出至少有二個盒子內恰裝有 1 顆珠子。因此共有六種情況需考慮：

(1) 恰 2 個盒子內恰裝有 1 顆珠子。
此時只有 1 種放法：3+3+3+3+3+3+1+1；

(2) 恰三個盒子內恰裝有 1 顆珠子。
此即從上一個放法中，從一個放有 3 顆珠子的盒子內取出 2 顆珠子放到另一個放有 3 顆珠子的盒子內。因改變盒子的排列順序視為相同的放法，故知也僅有 1 種放法 5+3+3+3+3+1+1+1；

(3) 恰四個盒子內恰裝有 1 顆珠子。
此即從上一個放法中，從一個放有 3 顆珠子的盒子內取出 2 顆珠子放到另一個放有 3 顆或 5 顆珠子的盒子內。因改變盒子的排列順序視為相同的放法，故知僅有 2 種放法：7+3+3+3+1+1+1+1、5+5+3+3+1+1+1+1；

(4) 恰五個盒子內恰裝有 1 顆珠子。
此即從上一個放法中，從一個放有 3 顆珠子的盒子內取出 2 顆珠子放到另一個放有 3 顆、5 顆或 7 顆珠子的盒子內。因改變盒子的排列順序視為相同的放法，故知僅有 3 種放法：9+3+3+1+1+1+1+1、7+5+3+1+1+1+1+1、5+5+5+1+1+1+1+1；

(5) 恰六個盒子內恰裝有 1 顆珠子。
此即從上一個放法中，從一個放有 3 顆珠子的盒子內取出 2 顆珠子放到另一個放有 3 顆、5 顆、7 或 9 顆顆珠子的盒子內。因改變盒子的排列順序視為相同的放法，故知僅有 3 種放法：11+3+1+1+1+1+1+1、9+5+1+1+1+1+1+1、7+7+1+1+1+1+1+1；

(6) 恰七個盒子內恰裝有 1 顆珠子。
此時只有 1 種放法：13+1+1+1+1+1+1+1。

故共有 1+1+2+3+3+1=11 種不同的放法。

【解 2】
可知 8 個奇正整數之和最小為 1+1+1+1+1+1+1+1=8，與 20 的差為 12=6×2，因

此可看成將 6 個 2 分配到 8 個加數內的分配方式，且因改變順序視為相同的解，故可視為將 6 寫成正整數和的方法數。

因 $6 = 5+1$

$= 4+2 = 4+1+1$

$= 3+3 = 3+2+1 = 3+1+1+1$

$= 2+2+2 = 2+2+1+1 = 2+1+1+1+1$

$= 1+1+1+1+1+1$，

共 11 種，故共有以下 11 種不同的放法：

$(1+6\times2)+1+1+1+1+1+1+1=13+1+1+1+1+1+1+1$；

$(1+5\times2)+(1+1\times2)+1+1+1+1+1+1=11+3+1+1+1+1+1+1$；

$(1+4\times2)+(1+2\times2)+1+1+1+1+1+1=9+5+1+1+1+1+1+1$；

$(1+4\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+1+1+1+1+1=9+3+3+1+1+1+1+1$；

$(1+3\times2)+(1+3\times2)+1+1+1+1+1+1=7+7+1+1+1+1+1+1$；

$(1+3\times2)+(1+2\times2)+(1+1\times2)+1+1+1+1+1=7+5+3+1+1+1+1+1$；

$(1+3\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+1+1+1+1=7+3+3+3+1+1+1+1$；

$(1+2\times2)+(1+2\times2)+(1+2\times2)+1+1+1+1+1=5+5+5+1+1+1+1+1$；

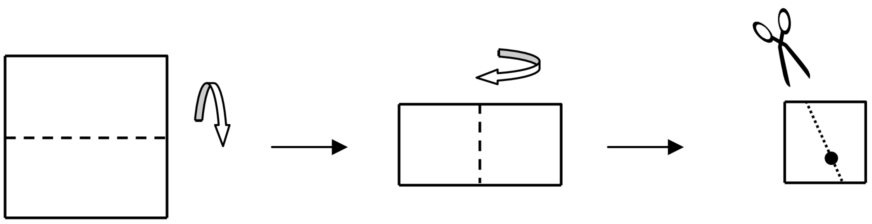
$(1+2\times2)+(1+2\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+1+1+1+1=5+5+3+3+1+1+1+1$；

$(1+2\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+1+1+1=5+3+3+3+3+1+1+1$；

$(1+1\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+(1+1\times2)+1+1=3+3+3+3+3+3+1+1$。

答：11 種

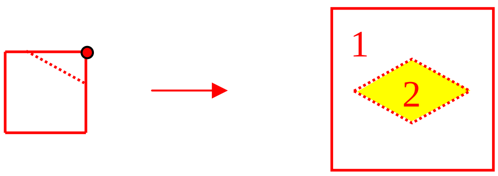
7. 將一張正方形紙片的上下邊重合在一起而摺疊成一個矩形，再將此矩形的左右邊重合在一起而摺疊成一個小正方形。經過這個小正方形內部任意一點畫任意一條直線，接著用剪刀沿著這條直線將紙片剪開。請問剪開後的紙張可能有幾種不同的片數？



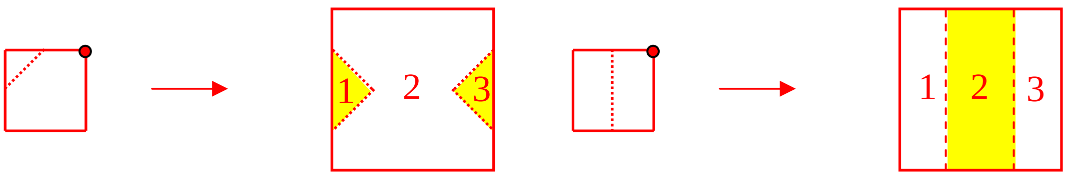
【解】

剪開後的紙張片數有 2、3、4、5 片等四種可能，假設原來正方形紙片的正中心摺至小正方形的右上角的紅點，則各種剪法如下：

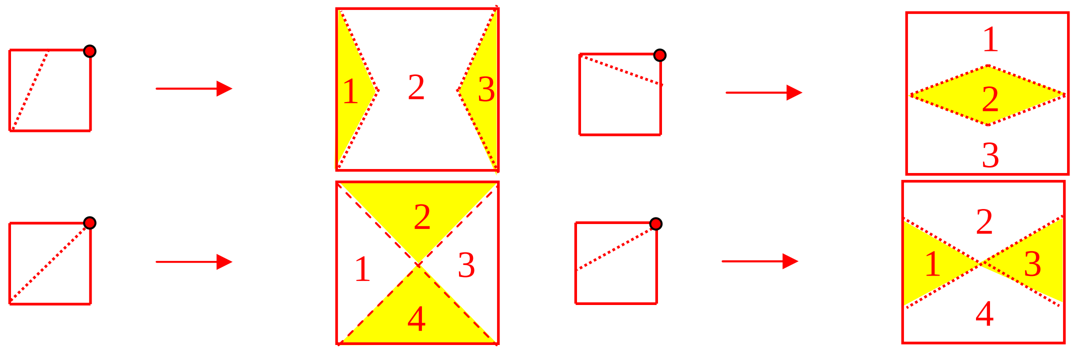
2 片：



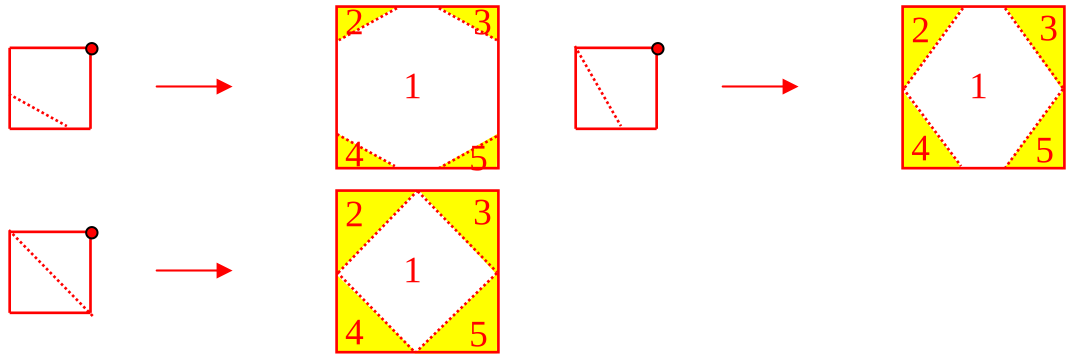
3 片：



4 片：



5 片：



答：4 種

8. 在某個年度裡，每個月的某個相同的日期數都不是星期日，請問這個日期數可能是什麼？

【解 1】

將一個星期裡的七天依序編號 0、1、2、3、4、5、6。接著考慮每一個月的第一天在星期裡的編號。若先不考慮一月與二月，則可知當這個月有 31 天時，下一個月的第一天在星期裡的編號會增加 3，而當這個月有 30 天時，下一個月的第一天在星期裡的編號會增加 2。其中若所得到的數字大於 6 時，則必須減去 7。依此規則，如果令三月一日的編號為 0，則知四月一日的編號為 3、五月一日的編號為 5、六月一日的編號為 1、七月一日的編號為 3、八月一日的編號為 6、九月一日的編號為 2、十月一日的編號為 4、十一月一日的編號為 0、十二月一日的編號為 2。可知 0、1、2、3、4、5、6 全部都有，因此每一個月的第一天並不是所要求的日子，且可推知接下來每一個月的第二天至第三十天也都不是所要求的日子。如果令三月一日的編號為 0，則可知三月三十一日的編號為 2，而五月三十一日的編號為 2+3+2=7，即為 0、七月三十一日的編號為 0+3+2=5、八月三十一日的編號為 5+3=8，即為 1、十月三十一日的編號為 1+3+2=6、十二月三十一日的編號為 6+3+2=11，即為 4；且在非閏年裡，一月三十一日的編號為 0−1=−1，即為 6，而閏年的一月三十一日的編號為 0−2=−2，即為 5。可發現編號 3 都沒有出現，因此若令編號 3 為星期日(即三月一日為星期四)，則每個月的第 31 天都不會出現在星期日。

【解 2】

為了方便起見，不妨令星期日為星期 7。現假設某個年度裡 1 月 1 日為星期 x，

其中$1 \le x \le 7$，則可以得知下列表中各日期的星期為：

	若該年度為閏年時	若該年度為非閏年時
1 月 31 日	$x+3$	$x+3$
3 月 31 日	x	$x+6$
5 月 31 日	$x+5$	$x+4$
7 月 31 日	$x+3$	$x+2$
8 月 31 日	$x+6$	$x+5$
10 月 31 日	$x+4$	$x+3$
12 月 31 日	$x+2$	$x+1$
	註：當和大於 7 時，則再減去 7。	

由表中可知當閏年且$x=6$，或非閏年$x=7$，該年每月之 31 日都不是星期日。

但再由下表可得知下列表中各日期的星期為：

	若該年度為閏年時	若該年度為非閏年時
1 月 30 日	$x+2$	$x+2$
3 月 30 日	$x+6$	$x+5$
4 月 30 日	$x+2$	$x+1$
5 月 30 日	$x+4$	$x+3$
6 月 30 日	x	$x+6$
7 月 30 日	$x+2$	$x+1$
8 月 30 日	$x+5$	$x+4$
9 月 30 日	$x+1$	x
10 月 30 日	$x+3$	$x+2$
11 月 30 日	$x+6$	$x+5$
12 月 30 日	$x+1$	x

	若該年度為閏年時	若該年度為非閏年時
1 月 29 日	$x+1$	$x+1$
2 月 29 日	$x+4$	—
3 月 29 日	$x+5$	$x+4$
4 月 29 日	$x+1$	x
5 月 29 日	$x+3$	$x+2$
6 月 29 日	$x+6$	$x+5$
7 月 29 日	$x+1$	x
8 月 29 日	$x+4$	$x+3$
9 月 29 日	x	$x+6$
10 月 29 日	$x+2$	$x+1$
11 月 29 日	$x+5$	$x+4$
12 月 29 日	x	$x+6$

	若該年度為閏年時	若該年度為非閏年時
1 月 28 日	x	x
2 月 28 日	$x+3$	$x+3$
3 月 28 日	$x+4$	$x+3$
4 月 28 日	x	$x+6$
5 月 28 日	$x+2$	$x+1$
6 月 28 日	$x+5$	$x+4$
7 月 28 日	x	$x+6$
8 月 28 日	$x+3$	$x+2$
9 月 28 日	$x+6$	$x+5$
10 月 28 日	$x+1$	x
11 月 28 日	$x+4$	$x+3$
12 月 28 日	$x+6$	$x+5$

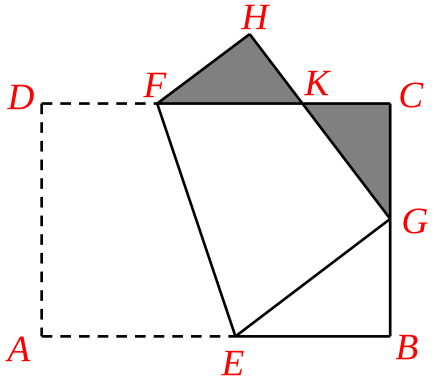
由上表可見無論 x 為何值，每月 30、29、28 日都不可能全非星期日，而每月皆有 1 日至 28 日，此時由 28 日的情況可以判斷出前一天的 27 日不可能全非星期日，再由 27 日的情況可以判斷出前一天的 26 日不可能全非星期日，繼續以上推論，可知每月 25、24 日亦都不可能全非星期日。

而　每月的 1、8、15、22、29 日之星期相同、
每月的 2、9、16、23、30 日之星期相同、
每月的 3、10、17、24 日之星期相同、
每月的 4、11、18、25 日之星期相同、
每月的 5、12、19、26 日之星期相同、
每月的 6、13、20、27 日之星期相同、
每月的 7、14、21、28 日之星期相同，

故知只有 31 日可能在某年度裡都不是星期日。

答：　31 日

9. 將一張矩形紙片依如圖所示之方式摺疊，使得紙片的一個頂點落在一條短邊的中點上。若陰影部分的兩個三角形是彼此互相全等的三角形，且未摺疊前的矩形紙片短邊長度是 12 cm，請問原來矩形紙片的面積是多少 cm^2？



【解】

如圖所示標示各點。

可知 $DF = FH = GC = 6\,cm$ 而 $FC = GH = 12\,cm$，可知 $CD=DF+FC=6+12=18$ cm 。

故原本矩形紙片的面積為 $12\times18=216\ cm^2$。　　答：　$216\ cm^2$

10. 將 2014 以頭尾相接的方式依序重複填寫 2014 次而得到一個 8056 位數。請問這一個數被 11 除所得整數的商之末位數是什麼？

【解】

利用此數的組成方式可以得知，由右至左數起，此數的奇數位與偶數位之間的差為 $2014\times(4+0-1-2)=2014$，即此數被 11 除所得的餘數與 2014 被 11 除所得的餘數相同。而 2014 被 11 除所得的餘數為 1，即此數被 11 除所得的餘數為 1。由此可得知 $\underbrace{20142014\cdots2014}_{2013\text{組}\,2014}2013$ 這一個 8056 位數可被 11 整除，故此數被 11 除所得整數的商之末位數為 3。

答：3

11. 在 4×4 的方格表的每一個小方格內填入「○」或「×」，使得在此方格表內任意一個 2×2、3×3、4×4 方格表四個角落的小方格都恰好各有二個「○」與二個「×」。請找出一種填法滿足以上條件，並使這一個方格表成為對稱的方格表。

A	B	C	D
E	F	G	H
I	J	K	L
M	N	O	P

【解】

如圖所示之方式標示各方格。可知 A、D、M 與 P 中有二個為「○」而另兩個為「×」。故需考慮二種情況：

(1) 二個「○」在對角方格上，可令為 A 與 P。故知 D 與 M 必為「×」：

○	B	C	×
E	F	G	H
I	J	K	L
×	N	O	○

可知 C、I、K 中有二個為「×」，即 C 與 I 中至少有一個為「×」。利用對稱性可假設 I 為「×」：

○	B	C	×
E	F	G	H
×	J	K	L
×	N	O	○

接著便可依序決定出(J, N)、(K, O)、L、(E, G)、(F, H)、B 和 C 的符號，此時可得中心對稱之一解(整個棋盤旋轉或翻轉之解亦可)，如下表所示：

○	×	○	×
○	×	○	×
×	○	×	○
×	○	×	○

(2) 二個「○」在相鄰的角落方格上，可令為 A 與 M。故 D 與 P 必為「×」：

○	B	C	×
E	F	G	H
I	J	K	L
○	N	O	×

可知 E 與 I 不可能同時皆為「○」，故可利用對稱性，假設 E 為「×」：

○	B	C	×
×	F	G	H
I	J	K	L
○	N	O	×

此時若 G 為「○」，則 O 必為「×」，因此 K 與 L 都必為「○」：

○	B	C	×
×	F	○	H
I	J	○	○
○	N	×	×

此時可發現 G、H、K、L 中有三個為「○」，不合。故知 G 必為「×」：

○	B	C	×
×	F	×	H
I	J	K	L
○	N	O	×

接著便可依序決定出(C, H)、O、(I, K)、L、(F, J)、(F, H)、B 和 N 的符號，此時可得水平中線為對稱軸之一解(整個棋盤旋轉或翻轉之解亦可)如下表所示：

○	×	○	×
×	○	×	○
×	○	×	○
○	×	○	×

12. 將 6 枚棋子黑白相間且相鄰地在桌面上排成一排。每次移動只能選擇其中二枚相鄰在一起的棋子，移動到與別的棋子相連的位置，且不可翻轉這二枚棋子的順序。請問棋子由下左圖至少要經過多少次符合上述規定的移動才可變成下右圖的排列？

● ○ ● ○ ● ○ → ○ ○ ○ ● ● ●

【解】

不妨由左至右依序編號 1、2、3、4、5、6，則知黑棋子位於 1、3、5 而白棋子位於 2、4、6；而由最終排列可知 2 號最後須位於 1 號的左邊、3 號最後須位於 4 號的左邊、5 號最後須位於 6 號的左邊。因移動一次無法完成其中之一，故知移動的總次數無法少於 3 次。而利用以下方式可恰移動 3 次而完成：

		●	○	●	○	●	○						

		●	○	●			○	○	●				

				●	●	○	○	○	●				

						○	○	○	●	●	●		

答：3 次